Exponentielle continue, exponentielles géométriques

Alain **W**azner, Léo et Hélène avec Petit-Pilou, pour **C**orentin et **N**ono.**R**iez et **S**ouriez

Prélude.

Rappelons la définition intégrale du logarithme népérien. Il s'agit de la fonction $ln : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ telle que $ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$, elle a pour réciproque la fonction exponentielle $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ notée $exp(x)$ ou e^x.

Introduction.

On considère ≪l'équation fonctionnelle sur $\mathbb{R}$ ≫

$$(E)\ f(a+b) = f(a) \times f(b)$$

c'est à dire que l'on suppose que $f(x)$ a une valeur en tout $x \in \mathbb{R}$, si pour une valeur $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = 0$ alors

$$f(x) = f(x-a+a) = f(x-a) \times f(a) = 0$$

l'application identiquement nulle est bien une solution de E et **toute solution non identiquement nulle ne s'annule jamais.**

Soit f une solution non identiquement nulle alors

- $f(x) \neq 0,\ \forall x \in 0.$
- $f(x) = f(x+0) = f(x) \times f(0)$ et donc $f(0) = 1$.
- $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 > 0$ car $f(x) \neq 0$.

f, si elle n'est pas l'application nulle est donc un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
Pour la métrique de la valeur absolue, un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est soit continu soit non continu en tout x.
Preuve : Si f est continue en a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \; f(x+h) = f(x-a)f(a+h)$$

$$lim_{h\to 0}f(x+h) = f(x-a)f(a) = f(x)$$

Un morphisme de groupe continu de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est monotone : Son noyau est l'ensemble - non vide car il contient 0- $\{x/f(x) = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
Mais ...tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est

- **Soit $\{0\}$.**
- **Soit $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.**
- **Soit dense dans $\mathbb{R}$.**

Voyez cela : si G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, et si G n'est pas $\{0\}$ alors on peut trouver $x \in G$ avec $x \neq 0$, la partie de $\mathbb{R}$ appelée G^+ et qui est $\{g \in G/g > 0\}$ n'est sûrement pas vide puisque x ou $-x$ appartiennent à G^+, G^+ est donc minorée par 0, G^+ admet donc une borne inférieure a (on entend par borne inférieure le plus grand m tel que $m \leq g \; \forall g \in G^+$), comme G^+ est un ensemble de réels positifs , $a \geq 0$.

- Si $a = 0$ comme G^+ est un ensemble de réels positifs et non nuls, il existe une suite g_n de G^+, que l'on peut choisir monotone décroissante, telle que $lim_{n \to +\infty} g_n = 0$, fixons un intervalle ouvert et non-vide $I =]\alpha, \beta[$, comme $lim_{n \to +\infty} g_n = 0$ et g_n est une suite décroissante positive et non nulle, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < g_N < \beta - \alpha$; soit l'ouvert, comme union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, $\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus \{ng_N/n \in \mathbb{Z}\}$, alors $\mathcal{O} \cap I \neq \emptyset$. En effet dans le cas contraire I est inclus dans le fermé $F = \{ng_N/n \in \mathbb{Z}\}$, F est donc d'intérieur non vide, ce qui est contradictoire puisque $\forall n \in \mathbb{Z}$ tout intervalle ouvert inclus dans $](N - 1 + 1/2)g_N, (N + 1 + 1/2)g_N[$ n'est pas inclus dans F.

  Puisque l'ouvert $\mathcal{O}$ rencontre n'importe quel intervalle ouvert non vide I c'est que I contient un élément de G.

  Supposons le contraire : alors on peut trouver I tel que la suite (g_n) ne rencontre pas I, soit alors la fonction ϕ de domaine de définition $\mathbb{R}$ et définie par

$$\phi(x) = E(x/g_N) - x/g_N$$

ϕ est à valeur sur $\mathbb{Z}$ et discontinue sur les seuls $ng_N,\ n \in \mathbb{N}$, sa restriction $\phi|_I$ au domaine I (qui est par ailleurs connexe) est continue par définition même de la fonction E partie entière.
il suit que ϕ est constante sur I car I est connexe, mais comme ϕ est constante et de valeur distincte sur chacun des intervalles $](n-1)g_N, ng_N[$, cela n'est possible que si I est inclus dans une composante connexe de $\mathcal{O}$ dont la mesure est au plus g_N, ceci contredit que I est de mesure $\beta - \alpha > g_N$ (la mesure d'un intervalle est ici la différence entre sa borne supérieure et sa borne inférieure).
On conclut que pour tout intervalle I $\exists n \in \mathbb{Z}, g_N \in \mathbb{Z}$ tel que $ng_N \in G^+$, comme $G^+ \subset G$ cela signifie que dans tout intervalle I, il y a un élément du groupe G dans I, ce qui veut dire : G est dense dans $\mathbb{R}$.

- Si $a > 0$ alors $a \in G^+$ car dans le cas contraire on peut trouver une suite strictement décroissante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G^+ qui converge vers a, cette suite est de Cauchy, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < g_n - g_{n+1} < a$, comme $g_n - g_{n+1} \in G^+$ cela contredit que a est la borne supérieure de G^+. Soit $g \in G$ alors $\exists n \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{R}$ avec $O \leq r < a$ tel que $g = na + r$, $r = g - na \in G$ et si $r \neq 0$

alors $r \in G^+$ et $r < a$: ce qui contredit que a est la borne inférieure de G^+, donc $r = 0$ et $g = na \in a\mathbb{Z}$. On a $G \subset a\mathbb{Z}$, et puisque $a \in G$ alors le groupe engendré par a est inclus dans G : $a\mathbb{Z} \subset G$ et donc $G = a\mathbb{Z}$.

Si le noyau de f est $\{0\}$ alors f est injective, l'isomorphisme $f(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}/Ker(f)$ indique alors que f est surjective et donc bijective. Une fonction bijective continue est strictement monotone par le théorème des valeurs intermédiaires.

Si le noyau de f est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $x = lim_{n \to +\infty} x_n$ avec $f(x_n) = 1$, f est continue donc

$$f(x) = lim_{n \to +\infty} f(x_n) = lim_{n \to +\infty} 1 = 1$$

f est monotone comme fonction constante.

Le noyau de f **continue** ne peut pas être $a\mathbb{Z}$ car ceci contredit que f est soit identiquement nulle soit ne s'annule jamais.

On a donc prouvé si f est continue, elle soit constante à 1 soit strictement positive et strictement monotone.

Les groupes des exponentielles comme seul groupe de morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,+)$.

Une application f de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ est un morphisme de groupe si elle vérifie

$$(E)\ f(a+b) = f(a)\times f(b)$$

Il existe une famille (cette famille est un groupe pour l'opération de produit des fonctions : c'est un groupe de Lie) de fonctions continues qui vérifient l'équation (E), il s'agit des fonctions définies par $E_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ où λ est n'importe quel nombre réel. **Si on suppose f continue et non constante égale à 1 il n'existe pas d'autre morphisme continu que les exemples précédents basés sur l'exponentielle** : Si f est continue et non constante, nous savons que f est de plus strictement monotone, strictement positive et que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, soit ϕ la fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ et telle que $\phi(x) = ln(f(x))$ alors ϕ est continue, strictement monotone, $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\phi(0) = 0$ et

$$\phi(x+y) = ln(f(x)f(y)) = ln(f(x))+ln(f((y)) = \phi(x)+\phi(y)$$

nous en déduisons que $\phi(x) = \lambda x$ où $\lambda = \phi(1) = ln(f(1))$.
En effet, si $\lambda = \phi(1)$ alors $\phi(0) = 0 = 0\times\lambda$ et si pour $n\in\mathbb{N}$, $\phi(n) = n\lambda$ alors

$$\phi(n+1) = \phi(n)+\phi(1) = n\lambda+\lambda = (n+1)\lambda$$

On a prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\phi(n) = \lambda n$, mais

$$0 = \phi(0) = \phi(x - x) = \phi(x) + \phi(-x)$$

prouve que ϕ est impaire, donc $\forall n \in \mathbb{Z}, \phi(n) = n$. Soit $x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$ alors $\phi(qx) = q\phi(x)$ par récurrence : ceci est vrai pour $p = 0$ et si $\phi(qx) = q\phi(x)$ alors

$$\phi((q+1)x) = \phi(qx+x) = \phi(qx)+\phi(x) = (q+1)\phi(x)$$

Soit à présent un nombre rationnel r alors $r = p/q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, donc

$$q\phi(r) = \phi(qr) = \phi(p) = \lambda p$$

on en déduit que $\phi(r) = \lambda p/q = \lambda r$.
Soit à présent la fonction g continue et définie sur tout $\mathbb{R}$ par $g(x) = \phi(x) - \lambda x$ alors g est nulle sur la partie $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, g est alors identiquement nulle car continue, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = ln(f(x)) = \lambda x$$

comme la fonction ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ d'inverse l'exponentielle et que f est à valeurs strictement positives ceci entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{\lambda x}$$