

# Exponentielle continue, exponentielles géométriques

Alain Wazner, Léo et Hélène avec Petit-Pilou, pour Corentin et Nono : riez, souriez

## Prélude

Rappelons la définition intégrale du logarithme népérien : Il s'agit de la fonction  $\ln : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ , elle a pour réciproque la fonction exponentielle  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  notée  $\exp(x)$  ou  $e^x$ .

## Introduction

On considère «l'équation fonctionnelle sur  $\mathbb{R}$  »

$$(E) \quad f(a + b) = f(a) \times f(b)$$

c'est à dire que l'on suppose que  $f(x)$  a une valeur en tout  $x \in \mathbb{R}$ , si pour une valeur  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f(a) = 0$  alors

$$f(x) = f(x - a + a) = f(x - a) \times f(a) = 0$$

l'application identiquement nulle est bien une solution de  $E$  et **toute solution non identiquement nulle ne s'annule jamais.**

Soit  $f$  une solution non identiquement nulle alors :

- $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = f(x + 0) = f(x) \times f(0)$  et donc  $f(0) = 1$
- $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 > 0$  car  $f(x) \neq 0$

$f$ , si elle n'est pas l'application nulle est donc un morphisme de groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ .

**Pour la métrique de la valeur absolue, un morphisme de groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  est soit continu soit non continu en tout  $x$ .**

**Preuve :** Si  $f$  est continue en  $a$  alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+h) = f(x-a)f(a+h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x-a)f(a) = f(x)$$

**Un morphisme de groupe continu de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  est monotone :** Son noyau est l'ensemble - non vide car il contient 0-  $\{x/f(x) = 1\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .

**Mais ...tout sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  est**

- **Soit  $\{0\}$**
- **Soit  $a\mathbb{Z}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$**
- **Soit dense dans  $\mathbb{R}$**

Voyez cela : Si  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , et si  $G$  n'est pas  $\{0\}$  alors on peut trouver  $x \in G$  avec  $x \neq 0$ , la partie de  $\mathbb{R}$  appelée  $G^+$  et qui est  $\{g \in G/g > 0\}$  n'est sûrement pas vide puisque  $x$  ou  $-x$  appartiennent à  $G^+$ ,  $G^+$  est donc minorée par 0,  $G^+$  admet donc une borne inférieure  $a$  (on entend par borne inférieure le plus grand  $m$  tel que  $m \leq g \forall g \in G^+$ ), comme  $G^+$  est un ensemble de réels positifs,  $a \geq 0$ .

– Si  $a = 0$  comme  $G^+$  est un ensemble de réels positifs et non nuls, il existe une suite  $g_n$  de  $G^+$ , que l'on peut choisir monotone décroissante, telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0$ , fixons un intervalle ouvert et non-vidé  $I = ]\alpha, \beta[$ , comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0$  et  $g_n$  est une suite décroissante positive et non nulle, on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $0 < g_N < \beta - \alpha$ ; soit l'ouvert, comme union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints,  $\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus \{ng_N/n \in \mathbb{Z}\}$ , alors  $\mathcal{O} \cap I \neq \emptyset$ . En effet dans le cas contraire  $I$  est inclus dans le fermé  $F = \{ng_N/n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $F$  est donc d'intérieur non vide, ce qui est contradictoire puisque  $\forall n \in \mathbb{Z}$  tout intervalle ouvert inclus dans  $] (N - 1 + 1/2)g_N, (N + 1 + 1/2)g_N[$  n'est pas inclus dans  $F$ .

**Puisque l'ouvert  $\mathcal{O}$  rencontre n'importe quel intervalle ouvert non vide  $I$  c'est que  $I$  contient un élément de  $G$ .**

Supposons le contraire : alors on peut trouver  $I$  tel que la suite  $(g_n)$  ne rencontre pas  $I$ , soit alors la fonction  $\phi$  de domaine de définition  $\mathbb{R}$  et définie par

$$\phi(x) = E(x/g_N) - x/g_N$$

$\phi$  est à valeur sur  $\mathbb{Z}$  et discontinue sur les seuls  $ng_N$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sa restriction  $\phi|_I$  au domaine

$I$  (qui est par ailleurs connexe) est continue par définition même de la fonction  $E$  partie entière.

**il suit que  $\phi$  est constante sur  $I$  car  $I$  est connexe**, mais comme  $\phi$  est constante et de valeur distincte sur chacun des intervalles  $](n-1)g_N, ng_N[$ , cela n'est possible que si  $I$  est inclus dans une composante connexe de  $\mathcal{O}$  dont la mesure est au plus  $g_N$ , ceci contredit que  $I$  est de mesure  $\beta - \alpha > g_N$  (la mesure d'un intervalle est ici la différence entre sa borne supérieure et sa borne inférieure). On conclut que pour tout intervalle  $I$   $\exists n \in \mathbb{Z}, g_N \in \mathbb{Z}$  tel que  $ng_N \in G^+$ , comme  $G^+ \subset G$  cela signifie que dans tout intervalle  $I$ , il y a un élément du groupe  $G$  dans  $I$ , ce qui veut dire :  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

- Si  $a > 0$  alors  $a \in G^+$  car dans le cas contraire on peut trouver une suite strictement décroissante  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $G^+$  qui converge vers  $a$ , cette suite est de Cauchy, on peut trouver  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $0 < g_n - g_{n+1} < a$ , comme  $g_n - g_{n+1} \in G^+$  cela contredit que  $a$  est la borne supérieure de  $G^+$ . Soit  $g \in G$  alors  $\exists n \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}$  avec  $0 \leq r < a$  tel que  $g = na + r, r = g - na \in G$  et si  $r \neq 0$  alors  $r \in G^+$  et  $r < a$  : ce qui contredit que

$a$  est la borne inférieure de  $G^+$ , donc  $r = 0$  et  $g = na \in a\mathbb{Z}$ . On a  $G \subset a\mathbb{Z}$ , et puisque  $a \in G$  alors le groupe engendré par  $a$  est inclus dans  $G$  :  $a\mathbb{Z} \subset G$  et donc  $G = a\mathbb{Z}$ .

Si le noyau de  $f$  est  $\{0\}$  alors  $f$  est injective, l'isomorphisme  $f(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}/\text{Ker}(f)$  indique alors que  $f$  est surjective et donc bijective. Une fonction bijective continue est strictement monotone par le théorème des valeurs intermédiaires.

Si le noyau de  $f$  est dense dans  $\mathbb{R}$  alors  $\forall x \in \mathbb{R} \ x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  avec  $f(x_n) = 1$ ,  $f$  est continue donc

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$f$  est monotone comme fonction constante.

Le noyau de  $f$  **continue** ne peut pas être  $a\mathbb{Z}$  car ceci contredit que  $f$  est soit identiquement nulle soit ne s'annule jamais.

**On a donc prouvé si  $f$  est continue, elle soit constante à 1 soit strictement positive et strictement monotone.**

**Les groupes des exponentielles comme seul groupe de morphismes continus de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(\mathbb{R}_+^*, +)$**

Une application  $f$  de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  est un morphisme de groupe si elle vérifie

$$(E) \quad f(a + b) = f(a) \times f(b)$$

Il existe une famille (cette famille est un groupe pour l'opération de produit des fonctions : c'est un groupe de Lie) de fonctions continues qui vérifient l'équation (E), il s'agit des fonctions définies par  $E_\lambda(x) = e^{\lambda x}$  où  $\lambda$  est n'importe quel nombre réel. **Si on suppose  $f$  continue et non constante égale à 1 il n'existe pas d'autre morphisme continu que les exemples précédents basés sur l'exponentielle** : Si  $f$  est continue et non constante, nous savons que  $f$  est de plus strictement monotone, strictement positive et que  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ , soit  $\phi$  la fonction définie sur tout  $\mathbb{R}$  et telle que  $\phi(x) = \ln(f(x))$  alors  $\phi$  est continue, strictement monotone,  $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ,  $\phi(0) = 0$  et

$$\phi(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = \phi(x) + \phi(y)$$

nous en déduisons que  $\phi(x) = \lambda x$  où  $\lambda = \phi(1) = \ln(f(1))$ .

En effet, si  $\lambda = \phi(1)$  alors  $\phi(0) = 0 = 0 \times \lambda$  et si pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\phi(n) = n\lambda$  alors

$$\phi(n + 1) = \phi(n) + \phi(1) = n\lambda + \lambda = (n + 1)\lambda$$

On a prouvé par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$   
 $\phi(n) = \lambda n$ , mais

$$0 = \phi(0) = \phi(x - x) = \phi(x) + \phi(-x)$$

prouve que  $\phi$  est impaire, donc  $\forall n \in \mathbb{Z}, \phi(n) = n$ .  
Soit  $x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$  alors  $\phi(qx) = q\phi(x)$  par  
récurrence : ceci est vrai pour  $p = 0$  et si  
 $\phi(qx) = q\phi(x)$  alors

$$\phi((q+1)x) = \phi(qx+x) = \phi(qx)+\phi(x) = (q+1)\phi(x)$$

Soit à présent un nombre rationnel  $r$  alors  $r = p/q$   
avec  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{Z}$ , donc

$$q\phi(r) = \phi(qr) = \phi(p) = \lambda p$$

on en déduit que  $\phi(r) = \lambda p/q = \lambda r$ .

Soit à présent la fonction  $g$  continue et définie sur  
tout  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \phi(x) - \lambda x$  alors  $g$  est nulle sur la  
partie  $\mathbb{Q}$  dense dans  $\mathbb{R}$ ,  $g$  est alors identiquement  
nulle car continue, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \ln(f(x)) = \lambda x$$

comme la fonction  $\ln$  est bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$   
d'inverse l'exponentielle et que  $f$  est à valeurs strite-  
ment positives ceci entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{\lambda x}$$